Problem 1

a) 3

b) f: N→N: f(n) = n^2, ℵ0

c) f: N→N: f(n) = n^109, ℵ0

d) f: N→N: f(n) = n^218, ℵ0

e) 整系数一元二次方程组的解含有无理数, 不可数, ℵ1

f) 圆心的横坐标集合为实数集, 不可数, ℵ1

Problem 2

a) A ⊆B则对任意x∈A, x∈B, 存在A→B的的单射f(x) = x, |A|≤|B|.

b) 1° 若A = ∅, B = ∅, B是可数的.

2° 若A是有限集, |A|≥|B|, B是有限集, B是可数的.

3° 若A是可数无限集, 存在自然数集N到A的满射函数g,

则存在自然数集N到B的满射函数f°g, B是可数的.

Problem 3

A = {a, b, c}, Ρ(A) = {∅, {c}, {b}, {b, c}, {a}, {a, c}, {a, b}, {a, b, c}}

2 = {0, 1}, 2^A = {{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>}, …, {<a, 1>, <b, 1>, <c, 1>}}

A中每个元素是否含有a, b, c与b中每个元素中数对0或1一一对应, A ≈ B.

Problem 4

{1, 2, 3} ^ω = {x | x = x0x1x2…, x0, x1, x…∈ {1, 2, 3}}

假设有线性排列: x11x12x13…, x21x22x23…, x31x32x33… …….

构造x1x2x3… (xi ≠ xii), 它不在这个序列中, 则该集合不可数.

Problem 5

N^N = {f | f: N→N}, 假设对任意x把y = f(x)置于数串的第n位,

fi表示为yi1yi2yi3…, 构造f = y1y2y3… (yi≠yii) 则f不在序列中, 集合不可数.

Problem 6

a) A×B = {(a, b) | a∈A, b∈B}, 可看作|A|个{(ai, b) | b∈B}的并集.

其中第i个可以对其元素进行排序得(ai, b1), (ai, b2), (ai, b3)…

集合A×B中元素可列为(a1, b1), (a1, b2), (a1, b3)…, (a2, b1), (a2, b2), (a2, b3)…

b) 假设A1, A2, A3…是可数集, 任意Ai可以对其元素进行排序得ai1, ai2, ai3….

集合∪n i=1 Ai中元素可列为a11, a12, …, a21, a22, …, ……, an1, an2, an3….

Problem 7

a) A∩B = A∩C = ∅ 则|A∪B| = |A| + |B|, |A∪C| = |A| + |C|

又|B| = |C|, 则|A∪B| = |A∪C|.

b) 假设A是可数集, 对A∪B可以交替列出A的元素与B的元素排成序列,

与A∪B是不可数集矛盾, 故A一定是不可数集.